# 一般位相と解析学　講義報告　第 5 回 *

数学工房 †

2008 年 7 月 13 日 14:00-16:30

概要

本日の大きな目標は収束ネットは Cauchy ネットであることを示すことであった．ここで扱うネットは有向集合から位相線型空間への写像である．位相線型空間では和と積が連続という条件がある．これらは，直積位相空間から位相空間への連続写像と見ることができる．そこで，まずこれらの位相を，近傍系を使って与えた．ここで与えた連続の条件を使って収束ネットであれば Cauchy ネットであることを示した．次に，部分列に対応する部分ネットを定義して，ネットが収束するときはその任意の部分ネットも同一の極限に収束することを示した．

## 1　直積空間の位相

$(X,\ \mathfrak{O}(X))$, $(Y,\ \mathfrak{O}(Y))$ を位相空間とする．それぞれの近傍系を $\mathfrak{V}(X)$, $\mathfrak{V}(Y)$ とする．$X \times Y$ に位相を入れたい．いろいろな入れ方があるが，次のように近傍系を定義するのが便利である．実際これが近傍系の性質を満たしていることを示すことができる．

**定義 1.1.** 任意の $(x_0,\ y_0) \in X \times Y$ に対して $W$ が $(x_0,\ y_0)$ の近傍であるとは，ある $U \in \mathfrak{V}_{x_0}(X)$ と $V \in \mathfrak{V}_{y_0}(Y)$ が存在して $U \times V \subset W$ となることである．すなわち近傍を次のように定義する．

$$\mathfrak{V}_{(x_0,\ y_0)}(X,\ Y) := \left\{W \in 2^{X\times Y}\ ;\ \exists U \in \mathfrak{V}_{x_0}(X),\ \exists V \in \mathfrak{V}_{y_0}(Y) \text{ s.t. } U \times V \subset W\right\}$$

**命題 1.1.** 定義 *1.1* に示された

$$\left\{\mathfrak{V}_{(x_0,\ y_0)}(X,\ Y)\ ;\ (x_0,\ y_0) \in X \times Y\right\}$$

は $X \times Y$ 上の近傍系である．

---

* Reported by H.T.

† `http://www.sugakukobo.com`

**演習 1.1.** 命題 *1.1* を示せ．近傍系であることを示すには，近傍の公理で規定された条件を満たすことを示せばよい．

# 2　収束ネットと Cauchy ネット

点列の場合は，収束列であれば Cauchy 列であることが知られている．ネットでも同じことが成り立つ．すなわち，収束ネットであれば，Cauchy ネットである．ただし，これを示すのはそれほど自明ではない．以下ではそれを順序立てて示すことにする．

## 2.1　位相線型空間

Cauchy ネットは有向集合から位相線型空間への写像であった．まず位相線型空間であるための条件を示そう．

**定義 2.1** (位相線型空間)**.** $E$ が $\mathbb{K}$ 上の位相線型空間であるとは，$E$ 上に，ある位相（開集合系 $\mathscr{I}$）が存在して加法と $\mathbb{K}$ 倍の写像

$$
\begin{aligned}
a &: E \times E \ni (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) \longmapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E \\
s &: \mathbb{K} \times E \ni (\lambda,\ \boldsymbol{u}) \longmapsto \lambda \boldsymbol{u} \in E
\end{aligned}
$$

が連続となることである．

連続の条件を具体的に翻訳すると次の命題のようになる．

**命題 2.1.** 定義 *2.1* で示した連続の条件を具体的に書くと次のようになる．

加法　$a$ が連続とは，任意の原点の近傍 $V \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}$ に対して $U \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}$ が存在して $U + U \subset V$ となることである

$\mathbb{K}$ 倍　$s$ が連続とは，任意の $V \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}$ に対して $r > 0$ と $U \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}$ が存在して，任意の $\lambda,\ (|\lambda| < r)$ に対して $\lambda V \subset U$ となることである

この命題を示す前に，連続の定義を復習しておく．まず，位相空間から位相空間への写像の連続の定義は次の通りである．

**定義 2.2** (点で連続な写像)**.** 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}(X))$ から位相空間 $(Y,\ \mathfrak{O}(Y))$ への写像

$$
f : X \longrightarrow Y
$$

が $x_0 \in X$ で連続とは，任意の $V \in \mathfrak{V}_{f(x_0)}(Y)$ に対して $U \in \mathfrak{V}_{x_0}(X)$ が存在して $f(U) \subset V$ となることである．

一方，位相線型空間の加法と $\mathbb{K}$ 倍の写像は，直積位相空間から位相空間への写像である．この場合の，点での連続性は，次のようになる．

**定義 2.3** (直積位相空間から位相空間への点で連続な写像)．$X,\ Y,\ Z$ を位相空間とする．写像

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

が点 $(x_0,\ y_0) \in X \times Y$ で連続とは，任意の $V \in \mathfrak{V}_{f(x_0,\ y_0)}(Z)$ に対して，ある $W \in \mathfrak{V}_{(x_0,\ y_0)}(X, Y)$ が存在して $f(W) \subset V$ となることである．

直積集合の位相として，先の定義 1.1 に従う近傍系を採用する．このとき $(x_0,\ y_0)$ の近傍 $W$ は，ある $U_1 \in \mathfrak{V}_{x_0}(X)$ と $U_2 \in \mathfrak{V}_{y_0}(Y)$ が存在して $U_1 \times U_2 \subset W$ となることである．これを使うと定義 2.3 の連続の定義は以下の通りとなる．

**定義 2.4** (直積位相空間から位相空間への点で連続な写像)．$X,\ Y,\ Z$ を位相空間とする．写像

$$f : X \times Y \longrightarrow Z$$

が点 $(x_0,\ y_0) \in X \times Y$ で連続とは, 任意の $V \in \mathfrak{V}_{f(x_0,\ y_0)}(Z)$ に対してある $U_1 \in \mathfrak{V}_{x_0}(X)$ と $U_2 \in \mathfrak{V}_{y_0}(Y)$ が存在して $f(U_1 \times U_2) \subset U$ となることである．

**演習 2.1．** 命題 *2.1* を示せ．直積位相の連続の定義 *2.4* を参考にせよ．加法，$K$ 倍の写像は

$$\begin{aligned} a &: E \times E \longrightarrow E \\ s &: \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \end{aligned}$$

という直積空間から位相空間への写像とみることができる．それぞれ原点での連続を示せばよい．

## 2.2 収束ネットと Cauchy ネット

さていよいよ，次の命題を考察しよう．

**命題 2.2．** *$D$ を有向集合，$E$ を位相線型空間とする．$\varphi : D \longrightarrow E$ が $E$ 上の収束ネットであるとき，これは Cauchy ネットである．*

収束ネットの定義は以下の通りであった．

**定義 2.5** (収束ネット)**.** 有向集合 $D$ から位相空間 $E$ へのネット

$$\varphi : D \longrightarrow E$$

が収束ネットであるとは，ある $x_0 \in E$ が存在し，任意の近傍 $V \in \mathfrak{V}_{x_0}(E)$ に対して

$$\exists \lambda_\nu \in D \text{ s.t. } \varphi(\lambda) \in V \ \forall \lambda (\lambda_\nu \preceq \lambda)$$

となることである．

ここで与えた収束ネットの定義は一般的なものであり，$E$ は位相空間である．ただし収束ネットが Cauchy ネットであることを議論する場合には，$E$ を位相線型空間とする．

Cauchy ネットの定義は以下の通りであった．ただし，ここでは原点の近傍での条件を与えていることに注意せよ．

**定義 2.6** (Cauchy ネット)**.** 有向集合 $D$ から位相線型空間 $E$ へのネット

$$\varphi : D \longrightarrow E$$

が Cauchy ネットであるとは，任意の $V \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}(E)$ に対して，$\nu \in D$ が存在して，

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\mu) \in V, \ \forall \lambda, \ \forall \mu \ (\nu \preceq \lambda, \ \nu \preceq \mu)$$

となることである．

（注意）．任意の $x_0$ の近傍 $\mathfrak{V}_{x_0}(E)$ は，原点の近傍 $V \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}(E)$ を使って $x_0 + V$ と表されることに注意せよ．

**演習 2.2.** 命題 *2.2* を示せ．一筋縄ではいかないところがあるので注意せよ．

（解説）．講義では典型的な「行き詰まりの例」を示した．以下にそれを示す．

$\varphi \longrightarrow x_0 \in E$ とするとき，任意の $V \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}(E)$ に対して，ある $\lambda_\nu \in D$ が存在して

$$\varphi(\lambda) - x_0 \in V, \ \forall \lambda_\nu \preceq \lambda$$

となる．この $V$ について加法の連続性から，ある $U \in E$ が存在して，$U + U \subset V$ となる．この $U$ に対して $\lambda_U \in D$ が存在して

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda) - x_0 \in U \\ &\varphi(\mu) - x_0 \in U, \quad \lambda_U \preceq \lambda, \ \mu \end{aligned}$$

「この第 2 番目の式について $\varphi(\mu) - x_0,\ x_0 - \varphi(\mu) \in U$」とできれば

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) - \varphi(\mu) &= \varphi(\lambda) - x_0 + (x_0 - \varphi(\mu)) \\ &\in U + U \\ &\subset V\end{aligned}$$

となる．すなわち，Cauchy ネットは収束ネットである．鍵括弧でくくった部分は一般には成立しないので，この証明は行き詰まる...

この行き詰まりを解決するには $U$ の中に開球 $W = B_r(0)U$ を取り，これに対して上記の議論を行えばよい．開球なので，ある点が $W$ の要素なら，その符号を逆転した点も $W$ の要素となり，行き詰まることはない．このような開球が近傍の中にとれることを次の補題としてまとめておく．この補題は，$\mathbb{K}$ 倍の連続性の中で実質的に証明したものである．

**補題 2.3.** 任意の $V \in \mathfrak{V}_{\mathbf{0}}$ に対して $U \in \mathfrak{V}_0$ と $r > 0$ が存在して

$$W = B_r(0)U \subset V$$

となる．ここで $W$ は次の条件を満たす．$\lambda(\,|\lambda| = 1)$ なら $\lambda W \subset W$．ただし

$$W = \bigcup_{\mu \in B_r(0)} \mu U$$

である．

# 3 部分ネット

点列に対しては部分列を定義できる．同様にネットに対して，これに対応する部分ネットを定義できる．また部分列に対して成り立ついろいろな命題が部分ネットでも成り立つ．以下では部分ネットの定義を与え，これらの命題が成り立つことを示す．

まず，点列の部分列とは次の定義に従うものであった．

**定義 3.1** (部分列)**.** 点列 $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$ に対して狭義単調写像 $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が存在するとき

$$\theta = \varphi \circ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

を $\varphi$ の部分列という．

部分ネットの定義は以下の通りである．

**定義 3.2** (部分ネット)**.** $D$, $M$ を有向集合，$X$ を集合とし，ネット $\theta : M \longrightarrow X$ が与えられている．このとき $\theta : M \longrightarrow X$ が $\varphi$ の部分ネットであるとは次の cofinal 条件（共終条件）を満たす写像 $\tau : M \longrightarrow D$ が存在して

$$\theta = \varphi \circ \tau : M \longrightarrow X$$

となることである．

**定義 3.3** (cofinal（共終） 条件)**.** 写像 $\tau : M \longrightarrow D$ が cofinal 条件を満たすとは，任意の $\lambda_0 \in D$ に対して $\mu_0 \in M$ が存在して

$$\mu_0 \preceq \mu \Longrightarrow \lambda_0 \preceq \tau(\mu)$$

となることである．

**命題 3.1** (極限の唯一性)**.** $\varphi : D \longrightarrow X$ を収束ネットとする．$\varphi$ の任意の部分ネット $\theta : M \longrightarrow X$ は同じ極限に収束する．

ネットについても，部分列と同様に Weierstraß-Bolzano の定理が成り立つ．これを示すため，まずコンパクトの概念を説明する．

**命題 3.2.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $K$ について次は同値である．

*1°* $K$ は *Haine-Borel* の性質を満たす（*H.B.* の性質）
*2°* $K$ は有界でかつ閉
*3°* 任意の列 $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow K$ は収束する $\varphi$ の部分列 $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow K$ を持つ

性質 *2°*はコンパクトの概念に，また性質 *3°*は点列コンパクトの概念に発展する．